Μέθοδος Ροπών

Παρατήρηση

1) $E(\bar{x}) = \mu$ (για κάθε πληθυσμό)

$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum^{n} x_i$, $\mu = E(x) = \int x f(x,\theta)\,dx = \mu_1$

2) Έστω τ.δ $x_1, \dots, x_n$ από $f(x,\theta)$

Η κ-τάξης δειγματική ροπή $m_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^k$

Η κ-τάξης πληθυσμιακή ροπή $\mu_k = \int x^k f(x,\theta)\,dx$, $k=1,2,\dots$

$$E(m_k) = E\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^k\right] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(x_i^k) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\int x^k f(x,\theta)\,dx =$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mu_k = \frac{1}{n} n \mu_k \Rightarrow \boxed{E(m_k) = \mu_k} \quad , \forall k = 1,2,\dots$$

3) Μπορεί να αποδειχθεί ότι $m_k \xrightarrow[n\to\infty]{P} \mu_k$, $k=1,2,\dots$

Από τις παρατηρήσεις (2) και (3) ("χοντρά") $m_k \simeq \mu_k$, $k=1,2,\dots$

Πως το αξιοποιώ αυτό για εκτίμηση?

Έστω τ.δ $x_1, \dots, x_n$ από $f(x,\theta)$, $\theta \in \Theta \subseteq \mathbb{R}^r$

$\mu_1 = \mu_1(\theta_1, \dots, \theta_r) = \int x^1 f(x,\theta)\,dx \simeq m_1 = \frac{1}{n}\sum x_i$

$\mu_2 = \mu_2(\theta_1, \dots, \theta_r) = \int x^2 f(x,\theta)\,dx \simeq m_2 = \frac{1}{n}\sum x_i^2$

$\vdots$

$\mu_r = \mu_r(\theta_1, \dots, \theta_r) = \int x^r f(x,\theta)\,dx \simeq m_r = \frac{1}{n}\sum x_i^r$

Οι εκτιμητές με την μέθοδο των ροπών (ε.μ.ρ) θα συμβολίζονται με $\tilde{\vartheta}$ και προκύπτουν από τη λύση του συστήματος $\mu_k(\vartheta_1, \dots \vartheta_r) = m_k$, $k = 1, 2, \dots, r$.
όπου r το πλήθος των αγνώστων παραμέτρων.

Παράδειγμα

1) Έστω τ.δ $X_1, \dots, X_n$ από $N(\mu, \sigma^2)$. Να βρεθούν ε.μ.ρ των μ, σ^2

Λύση

Οι ε.μ.ρ. θα προκύψουν από την λύση του συστήματος:

$$\left.\begin{aligned} \mu_1 &= m_1 = \frac{1}{n} \Sigma x_i = \bar{x} \\ \mu_2 &= m_2 = \frac{1}{n} \Sigma x_i^2 \\ \\ \mu_1 &= E(x) = \mu \\ \mu_2 &= E(x^2) = Var(x) + (Ex)^2 = \sigma^2 + \mu^2 \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{aligned} \mu &= \bar{x} \\ \sigma^2 + \mu^2 &= \frac{1}{n} \Sigma x_i^2 \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\tilde{\mu} = \bar{x}$$

$$\sigma^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \bar{x}^2 = \frac{1}{n} \Sigma (x_i - \bar{x})^2$$

Άρα οι ε.μ.ρ είναι $\tilde{\mu} = \bar{x}$ και $\tilde{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \Sigma (x_i - \bar{x})^2$

Παρατήρηση

ε.μ.ρ $\equiv$ Ε.Μ.Π

2) Έστω τ.δ. $X_1, \dots X_n$ από $U[0,\theta]$, $\theta>0$. Να βρεθεί ε.μ.ρ. ②

για την θ.

Λύση

$$\left.\begin{aligned} \mu_1 &= m_1 \\ \mu_1 &= E(x) = \frac{\theta}{2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{\theta}{2} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \Rightarrow \theta = 2\bar{x}$$

Επομένως $\tilde{\theta} = 2\bar{x}$

Παρατήρηση

ε.μ.ρ. $\neq$ Ε.Μ.Π. Ο ε.μ.ρ δεν είναι συνάρτηση του επαρκούς $X_{(n)}$

(αφού $\hat{\theta} = X_{(n)}$)

3) Έστω τ.δ $X_1, \dots, X_n$ από $G(a,b)$. Να βρεθούν ε.μ.ρ a,b

Λύση

$$\left.\begin{aligned} \mu_1 &= m_1 \\ \mu_2 &= m_2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} E(x) &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \\ E(x^2) &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} ab &= \bar{x} \\ Var(x) + (Ex)^2 &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{aligned} ab &= \bar{x} \\ ab^2 + a^2 b^2 &= \frac{1}{n}\sum x_i^2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \dots\dots \Rightarrow \text{Οι εμρ είναι } \tilde{a} = \frac{\bar{x}^2}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}$$

$$\text{και } \tilde{b} = \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{\bar{x}}$$

Παρατήρηση

Οι εμρ δίνονται αναλυτικά ενώ οι Ε.Μ.Π προσδιορίζονται αριθμητικά

Εκτίμηση σε Διάστημα - Διαστήματα Εμπιστοσύνης. (2ο Κεφ.)

Έστω τ.δ $X_1, \dots, X_n$ από $f(x,\theta)$, $\theta \in \Theta \subseteq \mathbb{R}$

Εκτίμηση σε σημείο: $\hat{\theta} = \hat{\theta}(X_1, \dots, X_n) \simeq \theta$

ΟΡΙΣΜΟΣ

Έστω τ.δ $X_1, \dots, X_n$ από $f(x,\theta)$, $\theta \in \Theta \subseteq \mathbb{R}$. Αν $L = L(X_1, \dots, X_n)$ και $U = U(X_1, \dots, X_n)$ είναι στατιστικές συναρτήσεις με $L < U$ τότε το τυχαίο διάστημα (L, U) λέγεται διάστημα εμπιστοσύνης για την θ με βαθμό εμπιστοσύνης (β.ε) $100(1-a)\%$, $0 < a < 1$ αν $P(L < \theta < U) = 1 - a$ $\forall \theta \in \Theta$

Παρατήρηση

1) Στην πράξη ο β.ε. επιλέγεται να είναι 99% ή 95% ή 90%

2) Έστω $x_1, \dots, x_n$ η παρατηρούμενη τιμή του τ.δ $X_1, \dots, X_n$. Τότε το $100(1-a)\%$ δ.ε για την παρατηρούμενη τιμή $x_1, \dots, x_n$ είναι το $\left(L(x_1, \dots, x_n), U(x_1, \dots, x_n) \right)$

Η φυσική ερμηνεία του δ.ε είναι ότι αν επαναλάβω την δειγματοληψία 100 φορές τότε περιμένω $100(1-a)\%$ η πραγματική τιμή του θ να βρίσκεται στο διάστημα (L, U)

3) Πιθανώς μπορεί να βρω περισσότερες από μια συναρτήσεις L και U του τ.δ $X_1, \dots, X_n$ τέτοιες ώστε $P(L<\theta<U) = 1-\alpha$

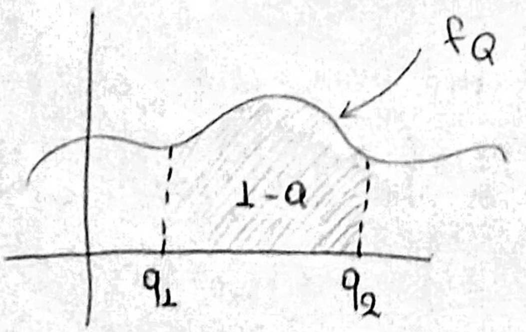
Προφανώς το καλύτερο δ.ε θα είναι εκείνο που έχει το μικρότερο μήκος $l = U - L$

Ερώτημα: Πως μπορώ να κατασκευάσω δ.ε?

Μέθοδος Αντιστρεπτής Ποσότητας

Βήμα 1: Προσδιορίζω μια συνάρτηση $Q = Q(X_1, \dots, X_n, \theta)$ και της οποίας η κατανομή είναι ανεξάρτητη της θ.
Μια τέτοια Q λέγεται αντιστρεπτή ποσότητα.

Βήμα 2: Έστω f_Q η κατανομή της Q η οποία δεν θα εξαρτάται από το θ



Άρα $\exists\, q_1, q_2$ με $q_1 < q_2$ τέτοια ώστε

$$P(q_1 \le Q(X_1, \dots, X_n, \theta) \le q_2) = 1-\alpha$$

Βήμα 3: Αν μπορώ να λύσω τις ανισότητες ως προς θ και να εκφράσω την (*) στη μορφή

$$P\left(L(\underline{x}, q_1, q_2) < \theta < U(\underline{x}, q_1, q_2)\right) = 1-\alpha$$

τα άκρα αυτά που θα βρω είναι τα L και U του δ.ε.

Διαστήματα Εμπιστοσύνης για παραμέτρους της $N(\mu,\sigma^2)$

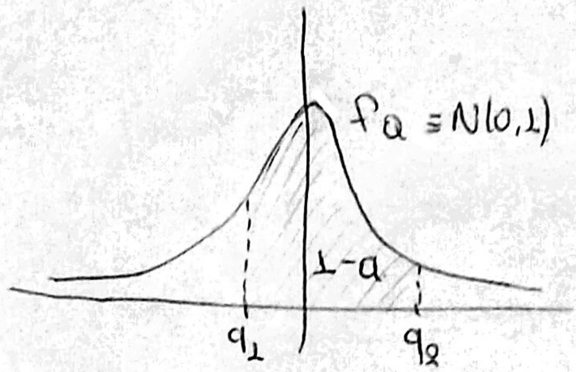
Έστω τ.δ $X_1,\dots,X_n$ από $N(\mu,\sigma^2)$

(I) Διάστημα Εμπιστοσύνης για την μ

α. έστω σ^2 γνωστό.

Θεωρώ την $Q = \dfrac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$

Η Q είναι αντιστρεπτή



Αφού Q αντιστρεπτή $\exists\, q_1, q_2$ με $q_1<q_2$ τέτοια ώστε

$P(q_1 < Q < q_2) = 1-a$

$$1-a = P(q_1<Q<q_2) = P\left(q_1 < \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} < q_2\right) =$$

$$= P\left(\bar{X} - q_2\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{X} - q_1\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

Άρα ένα δ.ε για την μ με β.ε $100(1-a)\%$ είναι

$$\left(\bar{X} - q_2\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \,,\, \bar{X} - q_1\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

Τα q_1, q_2 είναι εκείνα για τα οποία το μήκος δ.ε είναι ελάχιστο.

Ζητώ λοιπόν να βρω τα q_1, q_2 που ελαχιστοποιούν

το $l = \bar{X} - q_1\frac{\sigma}{\sqrt{n}} - \left(\bar{X} - q_2\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}(q_2-q_1)$

Λαμβάνοντας υπόψη και την σχέση που συνδέει τα q_1, q_2

$P(q_1 < Q < q_2) = 1-a$ ή $\Phi(q_2) - \Phi(q_1) = 1-a$

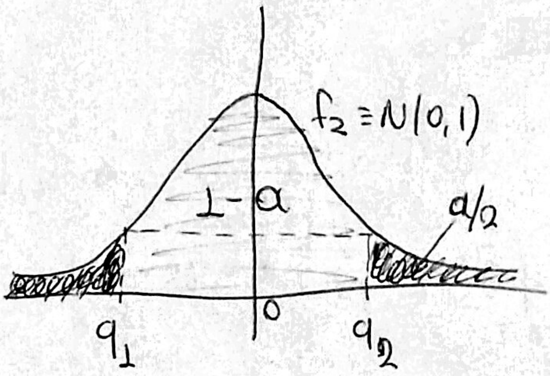
$$\frac{dl}{dq_1} = 0 \Rightarrow \frac{6}{\sqrt{n}}\left(\frac{dq_2}{dq_1} - 1\right) = 0 \Rightarrow \frac{dq_2}{dq_1} = 1 \quad (1)$$

$$\frac{d}{dq_1}\left(\Phi(q_2) - \Phi(q_1)\right) = \frac{d}{dq_1}(1-a) = 0 \Rightarrow \frac{d}{dq_1}\Phi(q_2) - \frac{d}{dq_1}\Phi(q_1) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{dq_2}{dq_1} \cdot \frac{d\Phi(q_2)}{dq_2} - f_Z(q_1) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{dq_2}{dq_1} \cdot f_Z(q_2) - f_Z(q_1) = 0 \Rightarrow \frac{dq_2}{dq_1} = \frac{f_Z(q_1)}{f_Z(q_2)} \quad (2)$$

Απο (1) και (2) $\Rightarrow \frac{f_Z(q_1)}{f_Z(q_2)} = 1 \Rightarrow f_Z(q_1) = f_Z(q_2)$



Λόγω της συμμετρίας $q_2 = -q_1$

Αφού το δ.ε ελαχίστου μήκους έχει $q_2 = -q_1$ λόγω συμμετρίας $P(Z \geq q_2) = P(Z \leq q_1) = \frac{a}{2}$ $\quad Z \sim N(0,1)$

Αλλά $P(Z \geq q_2) = \frac{a}{2}$ (εξ' ορισμού των εκατοστιαίων σημείων)

$\Rightarrow q_2 = z_{a/2}$

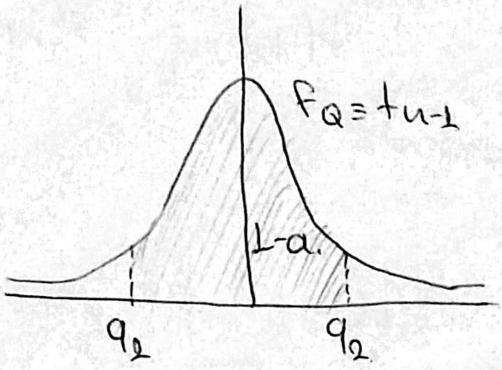
Το δ.ε με β.ε $100(1-a)\%$ ελαχίστου μήκους είναι

$$\left(\bar{x} - z_{a/2}\frac{6}{\sqrt{n}},\ \bar{x} + z_{a/2}\frac{6}{\sqrt{n}}\right)$$

β. Έστω σ^2 άγνωστο.

Θεωρώ την $Q = \frac{\bar{x}-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim t_{n-1}$

Η Q είναι αντιστρεπτή αφού έχει κατανομή ανεξάρτητη της t.



Αφού Q αντιστρεπτή $\exists\, q_1, q_2$ με $q_1 < q_2$ τέτοια ώστε $P(q_1 < Q < q_2) = 1-a$.

$$P(q_1 < Q < q_2) = 1-a \Rightarrow P\left(q_1 < \frac{\bar{x}-\mu}{S/\sqrt{n}} < q_2\right) = 1-a \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P\left(\bar{x} - q_2\frac{S}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{x} - q_1\frac{S}{\sqrt{n}}\right) = 1-a$$

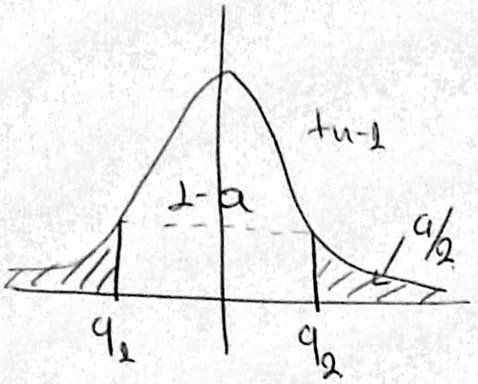
Από τον ορισμό του δ.ε με β.ε $100(1-a)\%$ και από την παραπάνω σχέση ένα δ.ε είναι $\left(\bar{x} - q_2\frac{S}{\sqrt{n}},\ \bar{x} + q_2\frac{S}{\sqrt{n}}\right)$

Επιλέγω q_1, q_2 με $q_1 < q_2$ που $1-a = P(q_1 < Q < q_2) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \int_{q_1}^{q_2} f_{t_{n-1}}(x)\,dx = F_{t_{n-1}}(q_2) - F_{t_{n-1}}(q_1)$$ τέτοια ώστε να ελαχιστοποιούν

το $l = \frac{S}{\sqrt{n}}(q_2 - q_1)$

Ακολουθώντας την ίδια διαδικασία όπως προηγουμένως τα q_1, q_2 που ελαχιστοποιούν το l είναι $f_{t_{n-1}}(q_1) = f_{t_{n-1}}(q_2)$ που λόγω της συμμετρίας $f_{t_{n-1}}$ σημαίνει ότι $q_2 = -q_1$



$$P(t_{n-1} \geq q_2) = \frac{a}{2} \xrightarrow{\text{ορισμό}} q_2 = t_{n-1,\, a/2}$$

και $q_1 = -q_2 = -t_{n-1,\, a/2}$

Το δ.ε ελαχίστου μήκους για μ θα είναι

$$\left(\bar{X} - t_{n-1,a/2}\frac{S}{\sqrt{n}}\ ,\ \bar{x} + t_{n-1,a/2}\frac{S}{\sqrt{n}}\right)$$